241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Cadre : On considère X un ensemble non vide et $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E et $f : X \to E$.

I Modes de convergence

1) Suites de fonctions

Définition 1. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f lorsque, pour tout $x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On note $f_n \xrightarrow{CS} f$.

Remarque 2. *Il y a unicité de la limite simple.*

Exemple 3. *Soit $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = \mathbb{1}_{\{1\}}$ sur $[0,1]$. On note que la convergence simple ne préserve pas la régularité.*

Définition 4. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f lorsque $(\|f - f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On note $f_n \xrightarrow{CU} f$.

Remarque 5. *La convergence uniforme implique la convergence simple.*

Contre-exemple 6. *Soit $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.*

Exemple 7. *Soit $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = 0$ sur $\mathbb{R}$, mais pas uniformément car $f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}}$.*

Théorème 8 (Critère de Cauchy uniforme)**.** *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si, et seulement si, elle est uniformément de Cauchy :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N}^\star,\ \|f_n - f_{n+p}\|_\infty < \varepsilon$$

Application 9. *La limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes est un polynôme.*

Théorème 10 (Weierstrass)**.** *L'ensemble des polynômes sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*

2) Séries de fonctions

Définition 11. On appelle série des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$. On la note $\sum f_n$, et on dit que la série $\sum f_n$ converge simplement vers f si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. On note alors $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

Remarque 12. *Si $\sum f_n$ converge simplement, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.*

Définition 13. On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Proposition 14. *Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.*

Proposition 15. *Soit $\sum f_n$ une série simplement convergente vers f. La convergence est uniforme si, et seulement si, $(f - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.*

Exemple 16. *Soit $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$. Alors la série $\sum f_n$ converge simplement vers $f : x \mapsto \frac{x}{1-e^{-x}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+\star}}(x)$, mais ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.*

Théorème 17. *$\sum f_n$ converge uniformément si, et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N}^\star,\ \|f_{n+1} + \ldots + f_{n+p}\|_\infty < \varepsilon$$

Définition 18. On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Exemple 19. *Si $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$, $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$.*

Théorème 20. *La convergence normale implique la convergence uniforme.*

3) Liens avec la continuité

On suppose que X est une partie d'un espace vectoriel F.

Théorème 21. *La convergence uniforme conserve la continuité.*

Théorème 22 (Double limite)**.** *Soit $a \in \overline{X}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$ existe. Alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b et on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Théorème 23 (Dini)**.** *Toute suite croissante de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ qui converge simplement dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ converge uniformément.*

II Dérivation et intégration

1) Dérivabilité

Ici, $X = I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle.

Théorème 24. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, et si f_n est dérivable sur I, il suffit d'avoir la convergence uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ pour que f soit dérivable sur I.*

Exemple 25. *Si $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ sur $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction valeur absolue, non dérivable en 0.*

Théorème 26. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur I. Si $\sum f_n$ converge simplement, et si $\sum f_n'$ converge uniformément, alors $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est dérivable de dérivée $f' = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$*

Remarque 27. *On peut réitérer le théorème précédent pour une plus grande régularité.*

Exemple 28. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

2) Convergence dans un espace mesuré

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 29. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers f lorsqu'il existe $N \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(N) = 0$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $X \setminus N$.

Définition 30. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p lorsque la suite $(\|f_n - f\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.

Exemple 31. *Si $(X, \mathcal{A}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, on pose, pour $n \geqslant 0$ et $k \in [\![0, 2^n - 1[\![$, $f_{2^n+k} = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}$. Ceci définit bien une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\|f_n\|_p = 2^{-\frac{n}{p}} \to 0$, mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas μ-presque partout.*

Proposition 32. *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\mu)$ et $f \in L^p(\mu)$. Si $f_n \xrightarrow{L^p} f$, alors on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant μ-presque partout.*

3) Théorèmes d'interversion

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème 33 (Beppo Levi)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ est mesurable et $\int_X \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.*

Application 34. *Soit $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(\alpha) = \int_0^\infty e^{(\alpha-1)x} dx = \frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$ et $+\infty$ sinon.*

Théorème 35 (Lemme de Fatou)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables et positives, alors $\int_X \liminf\limits_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.*

Application 36. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables simplement convergente vers f telle que $\sup_n \int_X |f_n| d\mu < \infty$. Alors f est intégrable.*

Application 37. *Soit f croissante sur $[0,1]$, continue en 0 et 1, dérivable presque partout sur $[0,1]$, alors $\int_0^1 f'(t)dt \leqslant f(1) - f(0)$.*

Théorème 38 (Convergence dominée)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^1(X, \mathbb{C}, \mu)$ et $f : X \to \mathbb{C}$ telles que :*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *μ p.p.*

(ii) $\exists\, g \in L^1(X, \mathbb{R}^+, \mu), \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leqslant g(x)$ *μ p.p.*

Alors $f \in L^1(X, \mathbb{C}, \mu)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Application 39. *Soit f dérivable partout sur $[0,1]$, de dérivée bornée. Alors $\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0)$.*

Théorème 40. *Soit $f_n : [a,b] \to E$ intégrable. Supposons que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$. Alors sa somme f est intégrable, et $\int_{[a,b]} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[a,b]} f_n$.*

Exemple 41. $\int_0^1 x^x\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^n}$.

III Exemples de séries de fonctions

1) Séries entières

Définition 42. On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où z est une variable complexe, et $a_n \in \mathbb{C}$.

Définition 43. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ le réel R défini par :

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \,\middle|\, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| r^n \leqslant M\right\}$$

Théorème 44 (Abel angulaire)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f sa somme et :*

$$\Delta_\theta = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 - z = \rho e^{i\varphi},\ \rho > 0,\ |\varphi| < \theta\right\} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$$

Alors :

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_\theta}} f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n$$

Application 45. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$

Théorème 46 (Taubérien faible)**.** *Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(z) = \ell$ existe, et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $\sum a_n$ converge et $\ell = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$.*

2) Séries de Fourier

Définition 47. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Les coefficients exponentiels de Fourier de f sont :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

En posant $e_n : t \mapsto e^{int}$, la série de Fourier associée à f est la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_{-n}$.

Proposition 48 (Riemann-Lebesgue)**.** *Si f est continue par morceaux et 2π-périodique, alors $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.*

Théorème 49. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. On a en particulier :*

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)^2$$

Proposition 50. *Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisation $\tilde{f}$ de f donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.*

Remarque 51. *L'hypothèse $\mathcal{C}^1$ par morceaux est nécessaire.*

Théorème 52. *Si f est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

Théorème 53. *Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, on considère l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T} \\ u(0,.) = u_0 & \text{dans } L^2(\mathbb{T}) \end{cases} \qquad (*)$$

Il existe une unique solution u de $(*)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T}$, avec $u(t,.)$ tendant vers u_0 dans $L^2(\mathbb{T})$ quand t tend vers 0.

Développements

— Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible (44,46) [Gou08]
— Équation de la chaleur sur le cercle (53) [Can09]

Références

[El 11] M. El Amrani. *Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions.* Ellipses
[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[BP12] M. Briane et G. Pagès. *Théorie de l'intégration.* Vuilbert
[Hau07] B. Hauchecorne. *Les Contre-exemples en Mathématiques.* Ellipses
[Can09] B. Candelpergher. *Calcul intégral.* Cassini